

应用超时间步方法的多区域伪谱时域算法

史 琰, 李 龙, 梁昌洪

(西安电子科技大学天线与微波技术国家重点实验室, 陕西西安 710071)

摘 要: 为了解决时域有限差分算法(FDTD)和伪谱时域算法(PSTD)稳定性方面的不足, 本文提出了一种基于超时间步(STS)的多区域伪谱时域算法(STS-MPSTD). 该算法不仅具有传统的多区域伪谱时域算法分析任意曲边形体问题时的精确性和灵活性, 而且在维持显式时间积分的简单性和精确性的同时也让它不受稳定性条件的约束. 最后文中给出的数值实例结果与解析结果完全吻合, 这充分证明了该算法具有高的精度和良好的稳定性.

关键词: 超时间步; 多区域; 伪谱时域算法; 稳定性

中图分类号: O441.4 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2005) 06 1136-04

Application of Super-Time-Stepping Method into Multi-Domain Pseudospectral Time Domain Algorithm

SHI Yan, LI Long, LIANG Chang-hong

(National Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract A new time domain algorithm which combines Super-Time-Stepping (STS) method and the multi-domain pseudospectral time domain (PSTD) algorithm is presented. This algorithm not only maintains accuracy and flexibility of PSTD for an accurate treatment of arbitrarily curved objects but also frees the explicit time integration scheme from the stability restriction, rendering it as usable as any implicit time integration scheme. Some numerical examples are given to illustrate the accuracy and stability of the proposed approach.

Key words: Super-Time-Stepping (STS); multi domain; pseudospectral time domain (PSTD); stability

1 引言

时域有限差分方法^[1] (FDTD) 一直以来被广泛应用于复杂环境电磁波的传播、散射和辐射问题的研究中. 尽管它具有算法简单、适用范围广等诸多优点, 但是众所周知该方法只有二阶的空间和时间精度, 而且为了保证能够求得具有一定精度的解, 就必须要求采样点密度达到每最小波长 10 到 20 个采样点, 更重要的是由于 FDTD 方法使用中心差分来显式实现时间和空间的导数, 因此该方法存在 CFL^[2] 稳定性的问题.

改进 FDTD 的精度和效率一直是一个活跃的研究课题. 在大量的研究当中, 高阶方法和谱域方法^[3,4] 作为一种高效稳定的计算方法越来越引起人们的注意. 最近伪谱时域算法 (PSTD) 被提出并且被证明大大优于 FDTD 方法. 傅立叶伪谱时域算法^[5] 最先被 Q H Liu 引入到电磁学中, 它采用快速傅立叶变换 (FFT) 来实现空间导数, 其仅仅要求每最小波长 2 个采样点. 切比雪夫伪谱时域算法^[6-10] 采用切比雪夫选配方法实现空间导数. 虽然它要求每最小波长 π 个采样点, 但是它对于不连续媒质可以达到谱域精度. 为了能够有效地求解具有复杂物体形状和多种媒质的物理问题, 多区域伪谱时域

算法^[6-10] 也被应用到电磁学中来. 多域伪谱时域方法的核心在于将整个计算区域分解成一些共形于复杂几何形状的小的计算区域, 类似于传统的伪谱时域算法在每一个子区域用多项式近似场量, 而在子区域之间通过传递信息的方式来实现整个区域的计算. 但是由于传统的伪谱时域算法采用显式的时间积分, 因此该算法也受到 CFL 的稳定性条件的限制.

为了克服上述在稳定性方面所存在的问题, Alternating Direction Implicit (ADI)^[11-14] 技术被最先引入到 FDTD 的算法中. 后来分裂步 (SS)^[15] 方法也被应用于 FDTD 的分析中. Zhao^[16] 分别将 SS 方法和 ADI 方法与 PSTD 算法相结合, 来解决 CFL 的稳定性问题. 但是很显然 ADI 方法和 SS 方法都是采用隐式时间积分, 这样在算法实施上就会带来一定的复杂性. 本文将超时间步 (STS)^[17,18] 方法与多区域 PSTD 算法相结合来处理 CFL 稳定性问题. 从概念上讲, STS 方法属于 Runge-Kutta-Chebyshev 方法^[19,20], 它在加速双曲系统的显式时间积分方面是一种非常简单有效的方法. 本文首先介绍与多区域伪谱时域算法相关的一些重要的技术, 然后详细描述一些显式时间积分策略和超时间步的原理. 最后本文给出了一些数值实例验证了基于超时间步的多区域 PSTD 算法的正确

性和稳定性.

2 基于超时间步的多区域伪谱时域算法

2.1 曲线形式的 MAXWELL 方程

考虑一个无源的、各向同性、导电的不均匀媒质, 其介电常数、磁导率和电导率分别为 ϵ 、 μ 和 σ . 对于 2-D TM_z 极化的 MAXWELL 方程其形式为:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A' \frac{\partial q}{\partial x} + B' \frac{\partial q}{\partial y} + Cq = 0 \quad (1)$$

式中, $q = [H_x \ H_y \ E_z]^T$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\mu \\ 0 & -1/\epsilon & 0 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\mu \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\epsilon & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma/\epsilon \end{bmatrix}$$

其中 ϵ 、 μ 和 σ 均为坐标 (x, y) 的函数.

在实际的问题中往往包括各种复杂形状的物体和各种不同的媒质, 因此对整个计算区域进行求解往往是很困难的. 为了简化复杂问题的计算, 我们根据复杂物体的形状和媒质的空间分布把整个计算区域分解为一些相对简单的且不重叠的计算区域, 从而把对复杂计算区域的求解变换为求解一些相对简单的计算区域. 在每个简单的计算区域中, 为了使用切比雪夫多项式近似电磁场量, 我们必须采用坐标变换把每个在坐标 (x, y) 下具有曲边界的四边形区域映射成在坐标 (ξ, η) 下的一个单位的正方形区域, 即 $[-1, 1] \times [-1, 1]$, 如图 1 所示.

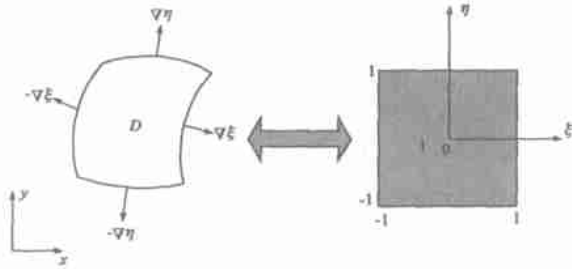


图 1 曲边四边形与正方形之间的区域映射

我们引入一般的坐标变换关系

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y) \quad (3)$$

则方程(1)变为

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A \frac{\partial q}{\partial \xi} + B \frac{\partial q}{\partial \eta} + Cq = 0 \quad (4)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi_x/\mu \\ 0 & 0 & -\xi_y/\mu \\ \xi_x/\epsilon & -\xi_y/\epsilon & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta_x/\mu \\ 0 & 0 & -\eta_y/\mu \\ \eta_x/\epsilon & -\eta_y/\epsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{且 } \xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

将坐标系 (x, y) 下的任意四边形映射成为坐标系 (ξ, η) 下的单位正方形之后, 我们就可以精确地求解场矢量 $q(\xi,$

$\eta)$ 关于空间坐标的导数. 我们采用 Chebyshev 选配方法, 选取 Chebyshev-Gauss Lobatto 点作为选配点来求解式(4), 使得式(4)在选配的意义成立, 即式(4)在选配点上被满足. 而从一维情况扩展到多维情况可以通过张量积的概念加以实现. 关于 Chebyshev 选配方法请详见参考文献[9].

2.2 子区域间信息传递

前面的内容实现了每一个子区域中的空间导数的计算. 然而更新后的电磁场一般不满足在子区域间交界面上的边界条件. 因此为了得到最终的整个计算区域的解, 我们就必须把各个子区域联系起来, 在它们之间建立一种信息传递的方式. 在一般情况下, 子区域间的交界面分为两种情况: 两个相邻的子区域具有相同的媒质特性; 两个相邻的子区域具有不同的媒质特性. 对于双曲方程系统式(4)而言, 一种精确、有效的信息传递方式就是特征变量法结合物理边界条件[6-9], 但是特征变量法比较复杂不容易实现. 在本文中, 我们针对处理的问题采用物理边界条件实现子区域间的信息传递方式.

在两个相邻的子区域的交界面上, 物理边界条件要求电磁场的切向分量连续, 即

$$\begin{aligned} E_t^{(1)} &= E_t^{(2)} \\ H_t^{(1)} &= H_t^{(2)} \end{aligned} \quad (6)$$

式中上标(1)和(2)分别代表两个相邻的子区域, 下标 t 表示交界面处的切向场分量. 首先我们提取切向场分量和法向场分量为

$$\begin{cases} E_t^{(1)} = E^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ H_t^{(1)} = H^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ E_n^{(1)} = E^{(1)} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} \\ H_n^{(1)} = H^{(1)} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} \end{cases} \quad \begin{cases} E_t^{(2)} = E^{(2)} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ H_t^{(2)} = H^{(2)} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ E_n^{(2)} = E^{(2)} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} \\ H_n^{(2)} = H^{(2)} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} E_t^{(1)} = E^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ E_n^{(1)} = E^{(1)} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} \\ H_t^{(1)} = H^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ H_n^{(1)} = H^{(1)} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} \end{cases} \quad \begin{cases} E_t^{(2)} = E^{(2)} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ E_n^{(2)} = E^{(2)} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} \\ H_t^{(2)} = H^{(2)} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ H_n^{(2)} = H^{(2)} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\boldsymbol{\hat{n}}$ 是交界面处的法向单位矢量, $\boldsymbol{\tau}$ 是交界面处的切向单位矢量. 我们要求切向场分量连续可得

$$\begin{cases} (E_t^{(1)}, E_t^{(2)}) \Leftarrow \frac{1}{2}(E_t^{(1)}, E_t^{(2)}) \\ (H_t^{(1)}, H_t^{(2)}) \Leftarrow \frac{1}{2}(H_t^{(1)}, H_t^{(2)}) \end{cases} \quad (9)$$

而对于法向场分量我们保持不变.

2.3 超时间步方法

对于双曲系统式(4), 经典的显式时间积分方法包括 Forward Euler 方法, Runge Kutta 方法等. 在本文中, 我们采用 Forward Euler 方法和 Runge Kutta 方法作为两种显式时间积分方法进行比较. 我们首先将式(4)写为

$$\frac{\partial q}{\partial t} = p(t, q) \quad (10)$$

$$\text{其中 } p(t, q) = -A \frac{\partial q}{\partial \xi} - B \frac{\partial q}{\partial \eta} - Cq \quad (11)$$

定义 $q_n = q(t_n)$, $t_n = n\Delta t$ 其中 Δt 是时间步间隔. 对于 Forward Euler 方法, 我们有

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t p(t_n, q_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

对于 2N 存储, M 步 K 阶 Runge Kutta 方法可表示为

$$\begin{aligned} u_0 &= q_n \\ \forall j &\in [1, M] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} k_j = a_j k_{j-1} + \Delta t p((n + c_j) \Delta t, u_{j-1}) \\ u_j = u_{j-1} + b_j k_j \\ q_{n+1} = u_M \end{cases} \quad (13)$$

其中常数 a_j, b_j, c_j 被求解来确定所采用 Runge Kutta 方法的阶数. 对于 2 步二阶 Runge Kutta 方法和 5 步四阶 Runge Kutta 方法的具体参数可参考文献[9].

下面我们详细地介绍超时间步的原理. 首先我们选择一个整数 N , 我们对每个时间步的稳定性不作要求, 而是要在一个超时间步 ΔT 后要求稳定. 超时间步 ΔT 是由 N 个子时间步 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ 所组成. 值得注意的是这些子时间步都可以显式地给出以保证每个超时间步后的稳定性, 同时也要使超时间步的间隔 $\Delta T = \sum_{i=1}^N \tau_i$ 达到最大. 由于修改的切比雪夫多项式的最优的特性, 这些子时间步可以被写为

$$\tau_i = \Delta t \left[(-1 + v) \cos \left(\frac{2i-1}{N} \frac{\pi}{2} \right) + 1 + v \right]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

式中 v 是 $(0, 1)$ 的某个数. 当 $v \rightarrow 0$ 时超时间步 ΔT 的时间间隔变为

$$\Delta T = \sum_{i=1}^N \tau_i \rightarrow N^2 \Delta t, \quad v \rightarrow 0 \quad (15)$$

将这个超时间步的时间间隔与 N 个显式的时间间隔 $N \Delta t$ 比较, 我们发现前者是后者的 N 倍, 也就是说同样执行 N 次子时间步, 超时间步方法会比简单的执行 N 个显式的时间间隔快 N 倍. 对于每个具体的 N , 超时间步对于足够大的 v 是稳定的. v 越大, 超时间步 ΔT 就越短. 超时间步的间隔 ΔT 受 N, v 和 Δt 的影响. 图 2 显示了超时间步的间隔 ΔT 随 N 和 v 的变化趋势.

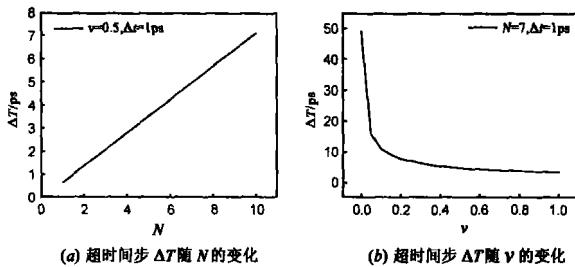


图 2 超时间步 ΔT 随 N 和 v 的变化

超时间步方法能够很容易的与显式时间积分方法合并在一起形成一个有效的的时间积分算法. 我们在通常的方式下选择显式时间间隔 Δt , 即 Δt 满足 CFL 稳定性条件. 我们并不执行显式时间间隔 Δt , 而是选择 N 和 v , 然后执行 N 个子时间间隔, 在一个超时间步的时间间隔 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, 执行结束后输出结果.

3 数值结果

作为我们的第一个数值例子, 我们考虑在自由空间中一个无限长理想导体圆柱的平面波散射问题. 2-D 的计算区域被分解成一些不相互重叠的曲边四边形. 最外层区域是 PML 子区域如图 3(a) 所示. 所有的子区域的选点都是 Chebyshev-Gauss Lobatt 点. 每个子区域都有 16×16 个网格点如图 3

(b) 所示. 一个平面波沿着 x 轴入射到理想导体圆柱上. 平面波的时间函数选为 Blackmar Harris 窗函数^[5], 其表达式为

$$f(t) = \begin{cases} -\sum_{n=1}^3 \frac{n\pi}{T} a_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right), & 0 < t < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (16)$$

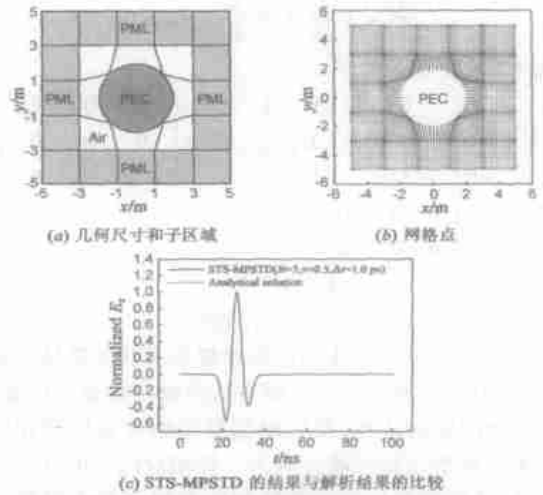


图 3 自由空间中二维圆柱散射的 STS-MPSTD 分析

式中 $a_1 = -0.488, a_2 = 0.145, a_3 = -0.01022222$. 理想导体圆柱的半径为 2m , 观察点位于 $(-2.1036, -2.1036)\text{m}$. 在计算中我们采用 2 步, 二阶 Runge Kutta 显式时间积分, 且 $N = 5, v = 0.5, \Delta t = 1\text{ps}$. 从图 3(c) 中可以看到基于超时间步的多区域伪谱时域算法的结果与解析结果吻合的很好, 从而显示了该方法的有效性和精确性.

下面我们讨论本文所提出的 STS-MPSTD 算法的稳定性问题. 若采用 5 步, 四阶 Runge Kutta 方法作为时间积分方法, 则显式时间间隔 Δt 需要满足的条件为

$$\Delta t \leq \text{CFL} \min_{\xi, \eta} \sqrt{\epsilon \mu} |\xi|^{-1} \quad (17)$$

其中 $\sqrt{\epsilon \mu}$ 是由于媒质而被修正的局部光速, 且

$$x = \frac{|\Delta \xi|}{\Delta \xi_j} + \frac{|\Delta \eta|}{\Delta \eta_j} \quad (18)$$

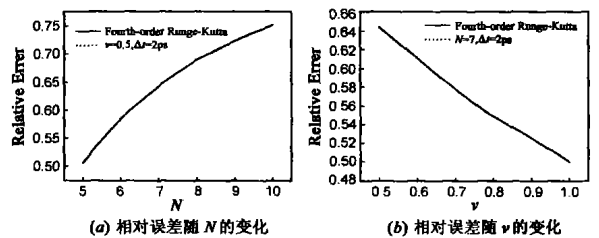


图 4 在四阶 Runge-Kutta 方法中相对误差随 N 和 v 的变化

这里 $|\cdot|$ 为矢量分量的绝对值, 而 $(\Delta \xi, \Delta \eta_j)$ 为局部网格的尺寸. 因此 x 是由于映射而产生的网格畸变的一种度量. 最后图 4 给出了采用 5 步, 四阶 Runge Kutta 方法作为显式时间积分方法数值结果的相对误差随 N 和 v 的变化情况. 从图中比较可以看出, N 的值越大, 或者 v 的值越小, 相对误差就会变得越大, 这是由于当 N 的值变大和 v 的值变小都会使超时间步的时间间隔 ΔT 变大. 另外当显式时间间隔 Δt 变大也会使

超时间步 Δt 变大, 从而使相对误差变大. 尽管我们要求显式时间间隔 Δt 满足 CFL 的条件, 但是从图 2 中我们可以看到只要适当地选择 N 和 v 的值超时间步的时间间隔 ΔT 就可以不受 CFL 条件的限制. 根据我们的经验, 当 $N \leq 5, v \geq 0.15$ 时, SIS-MPSTD 算法具有良好的稳定性.

4 结论

针对时域有限差分算法和伪谱时域算法的稳定性问题, 在本文中提出了一种基于超时间步的多区域伪谱时域算法. 该算法不仅能够有效地处理具有任意形状物体和任意媒质分布的电磁问题, 而且采用超时间步方法可以放松对每一个显式时间步的稳定性要求. 此外该算法能够很容易的和显式时间积分相结合, 而且容易编程. 数值结果被解析结果所验证, 这充分证明了该算法是一种具有高的精度和良好的稳定性的方法. 值得指出, 该算法能够容易地推广到三维情况, 可应用于复杂环境下电磁辐射、散射和射频电路问题的分析中.

致谢 作者在完成此篇文章的过程中, 得到了 Q. H. Liu 和 J. S. Hesthaven 教授的指导, 在此作者对他们表示衷心感谢.

参考文献:

- [1] K S Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media[J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1966, 14(3): 302- 307.
- [2] A Taflov. Computational Electrodynamics[M]. Norwood, MA: Artech House, 1995.
- [3] C Canuto, M Y Hussani, A Quarteroni, T Zang. Spectral Methods in Fluid Dynamics[M]. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [4] D Gottlieb, S A Orszag. Numerical Analysis of Spectral Methods[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1977.
- [5] Q H Liu. The PSTD algorithm: A time domain method requiring only two cells per wavelength[J]. Microwave Opt Technol Lett, 1997, 15: 158- 165.
- [6] B Yang, D Gottlieb, J S Hesthaven. Spectral simulation of electromagnetic wave scattering[J]. J Comput Phys, 1997, 134(2): 216- 230.
- [7] B Yang, J S Hesthaven. A pseudospectral method for time domain computation of electromagnetic scattering by bodies of revolution[J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1999, 47(1): 132- 141.
- [8] B Yang, J S Hesthaven. Multidomain pseudospectral computation of Maxwell's equations in 3-D general curvilinear coordinates[J]. Appl Numer Math, 2000, 33(2): 281- 289.
- [9] G X Fan, Q H Liu, J S Hesthaven. Multidomain pseudospectral time domain method for simulation of scattering from objects buried in lossy media[J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 2002, 40(6): 1366-

1373.

- [10] G Zhao, Q H Liu. The 3-D multidomain pseudospectral time domain algorithm for inhomogeneous conductive media[J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 2004, 52(3): 742- 749.
- [11] T Namiki. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method[J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1999, 47(10): 2003- 2007.
- [12] T Namiki, K Ito. A new FDTD algorithm free from the CFL condition restraint for 2D-TE wave[A]. IEEE Antennas Propagat Symp Dig[C]. Orlando: IEEE Press, 1999. 192- 195.
- [13] F Zheng, Z Chen, J Zhang. Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite difference time domain method[J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 2000, 48(7): 1550- 1558.
- [14] C Yuan, Z Chen. On the modeling of conducting media with the unconditionally stable AD-FDTD method[J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 2003, 51(8): 1929- 1938.
- [15] J Lee, B Fomberg. A split step approach for 3-D Maxwell's equations[J]. J Comput Appl Math, 2003, 158(2): 485- 505.
- [16] G Zhao, Q H Liu. The unconditionally stable pseudospectral time domain (PSTD) method[J]. IEEE Microwave Wireless Compon Lett, 2003, 13(11): 475- 477.
- [17] V Alexiades, G Amiez, P A Gremaud. Super Time Stepping acceleration of explicit schemes for parabolic problems[J]. Communication in Numerical Methods in Engineering, 1996, 12(1): 31- 42.
- [18] Vasilios Alexiades. Overcoming the stability restriction of explicit schemes via super time stepping[A]. The 2nd International Conference on Dynamic Systems and Applications[C]. Atlanta: Dynamic Publishers, 1995. 39- 44.
- [19] P J Van Der Houwen. Construction of Integration Formulas for Initial Value Problems[M]. Amsterdam: North Holland, 1977.
- [20] J G Verwer, W H Hundsdorfer, B P Sommeijer. Convergence properties of the Runge-Kutta-Chebyshev method[J]. Numer Math, 1990, 57(1): 157- 178.

作者简介:

史 琰 男, 1979 年 7 月出生于天津, 现为西安电子科技大学电磁场与微波技术专业直接攻读博士研究生, 主要从事电磁场数值计算、微带电路、周期结构等方面的研究工作. Email: shiyan@mail.xidian.edu.cn

李 龙 男, 1977 年 1 月出生于贵州安顺, 现为西安电子科技大学电磁场与微波技术专业博士研究生, 主要从事电磁场数值计算、电磁兼容、光子带隙等方面的研究工作.

梁昌洪 男, 1943 年 12 月出生于上海, 现为西安电子科技大学教授, 博士生导师, 并任中国电子学会微波学会副主任委员、中国电子学会会士、IEEE Senior member 等职, 2003 年荣获首届全国教学名师奖, 研究方向包括计算场论、计算微波、微波网络理论、电磁散射与逆散射、电磁兼容等方面.